



*Uplifting Mathematics for All*

# **Guía didáctica**

## **Puntos que explotan**

### **(Exploding Dots™)**

## **Experiencia 2:**

### **¡Eureka!**

**Visión general 2 Explicamos la máquina 1 ← 2 3 Explicamos más máquinas 5 Hablamos como la máquina 1 ← 10 6 Material A: Explicamos las máquinas 7 Soluciones a las preguntas de «Material A» 10 Material B: Exploraciones brutales 10**

#### **Recursos relacionados:**

- Podéis acceder a los vídeos de *Puntos que explotan* (Exploding Dots™) aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/>
- Es recomendable repasar la guía *Getting Started*.
- Encontraréis material imprimible para el alumno sobre esta experiencia.



© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. [gdaymath.com](http://gdaymath.com)

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

*Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 2: ¡Eureka!*

**Experiencia 2: ¡Eureka!**

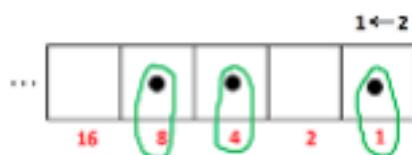
**Visión general**

## Objetivos del alumno

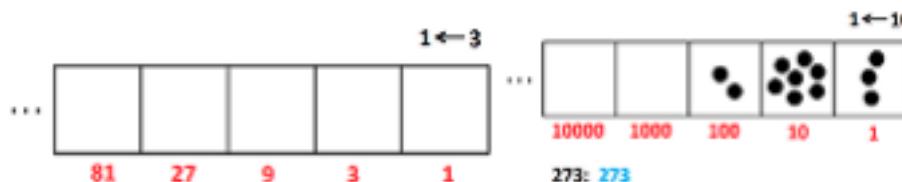
Los alumnos descubren que los códigos de las máquinas de puntos y casillas son las representaciones de los números en diferentes bases. Los códigos de la máquina  $1 \leftarrow 2$  son las representaciones binarias (base dos) de los números, los códigos de la máquina  $1 \leftarrow 3$  son las representaciones ternarias (base tres) de los números y los códigos de la máquina  $1 \leftarrow 10$  son las representaciones en base diez que nos son tan familiares.

## Breve resumen de la experiencia

En una máquina  $1 \leftarrow 2$ , un par de puntos en cualquier casilla equivalen a un único punto en la casilla de la izquierda. Dado que los puntos de la casilla de más a la derecha tienen que valer 1, el valor de cada punto de las casillas siguientes debe ser el resultado de un proceso de duplicación. Ahora podemos ver claramente que el código 1101 de la máquina  $1 \leftarrow 2$  para el número 13, por ejemplo, es correcto: el 13 es un 8, un 4 y un 1.



La máquina  $1 \leftarrow 3$  da las representaciones ternarias de los números. La máquina  $1 \leftarrow 10$  da las representaciones de números en base diez que nos son tan familiares.



Incluso en nuestro idioma tenemos las representaciones en base diez.

**273 = two hundred seventy three doscientos setenta y tres**

## Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia, aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:38 minutos].

Las tres lecciones principales de esta experiencia pasan muy rápidas. James tiene un vídeo en el que se incluyen las tres, aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minutos].

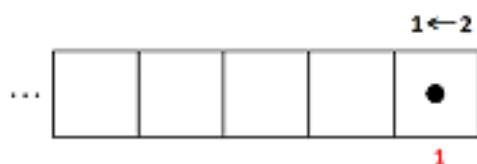
Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adaptarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando.

Vale. Ha llegado el momento de explicar qué hacen realmente las máquinas. (¿Vosotros ya lo habéis adivinado?)

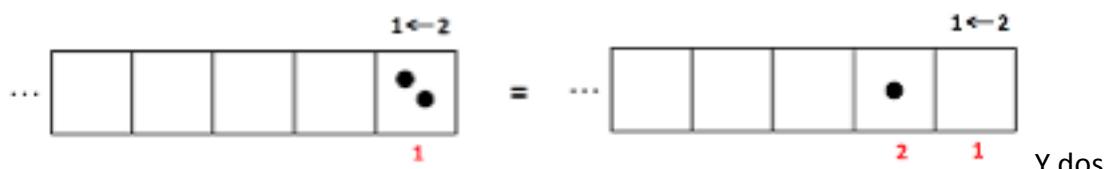
Volvamos a la máquina  $1 \leftarrow 2$  y, antes de nada, tratemos de entender cuál es la finalidad de este curioso artefacto. Recordad que sigle la regla:

*Cuando tenemos dos puntos en una casilla, «explotan», es decir, desaparecen, y son sustituidos por un punto en la casilla de la izquierda.*

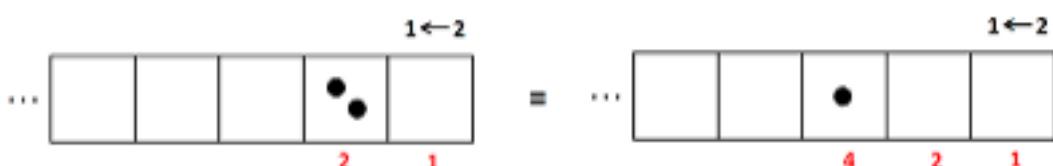
Y esta máquina está diseñada para que los puntos de la casilla de más a la derecha siempre valgan 1.



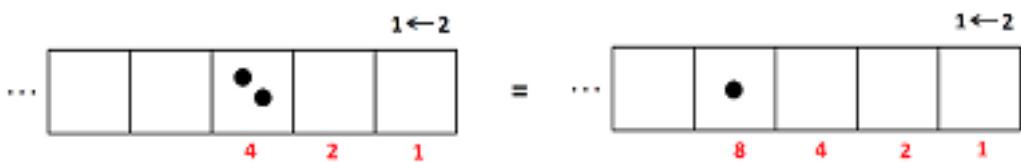
Con una explosión, dos puntos en la casilla de más a la derecha equivalen a un punto en la siguiente casilla de la izquierda. Y dado que cada punto de la casilla de más a la derecha vale 1, cada punto situado en la casilla siguiente tiene que valer dos 1, es decir, 2.



puntos en la segunda casilla equivalen a un punto en la casilla de la izquierda. Este punto tiene que valer dos 2, es decir, 4.



Y dos 4 hacen que el valor de un punto en la casilla siguiente sea 8.

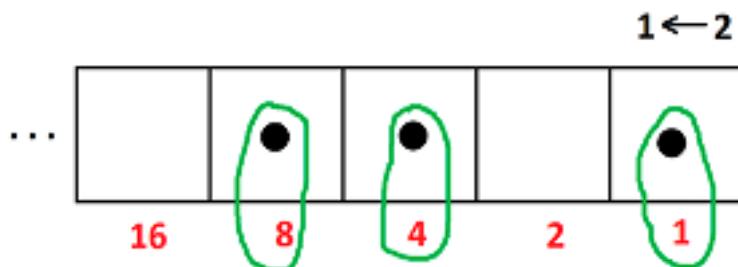


Y dos 8 dan 16, dos 16 dan 32, dos 32 dan 64, y así sucesivamente.

A veces, a los alumnos les gusta hacer listas de los dobles de los números. Aprovechadlo para pasároslo bien con ellos, si es el caso. (Yo, al cabo de un rato, suelo hacer ver que me estoy abriendo, y así podemos dar por terminado el juego...)



Hemos visto antes que el código para el 13 en una máquina  $1 \leftarrow 2$  es  $1101$ . Ahora podemos ver que es absolutamente correcto: un 8 y un 4, y ningún 2 y un 1 dan 13.



Los códigos  $1 \leftarrow 2$  para los números se denominan *representaciones binarias* de los números (el prefijo *bi-* significa 'dos'). También reciben el nombre de *representaciones en base dos*. Cuando se escriben números en binario, solo se utilizan dos símbolos: 0 y 1.

Los ordenadores funcionan con interruptores eléctricos que están encendidos o apagados. Por ello, en informática es natural codificar toda la aritmética en un código formado por solo dos símbolos: por ejemplo, 1 para «encendido» y 2 para «apagado». Por lo tanto, la base dos, binaria, es la base adecuada en el ámbito de la informática.

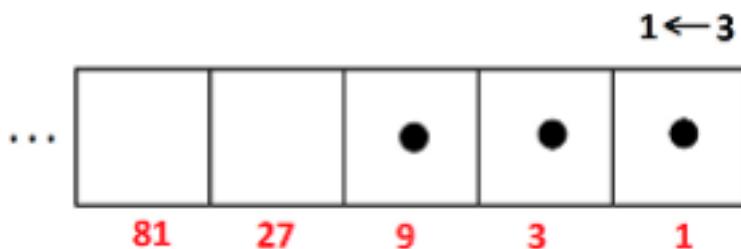
## Explicamos más máquinas

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minutos]

En una máquina  $1 \leftarrow 3$ , tres puntos en cualquier casilla equivalen a un único punto en la casilla de la izquierda. (Y, de nuevo, cada punto situado en la casilla de más a la derecha vale 1.) En esta máquina obtenemos los valores de los puntos cuando observamos que tres 1 dan 3, tres 3 dan 9, tres 9 dan 27, y así sucesivamente.



En algún momento hemos dicho que el código  $1 \leftarrow 3$  para 13 es  $III$ . Y ahora vemos que es correcto: un 9 y un 3 y un 1 dan 13, efectivamente.



Los códigos de la máquina  $1 \leftarrow 3$  se denominan *representaciones ternarias o en base tres* de los números. Solo se necesitan los tres símbolos 0, 1 y 2 para representar números en este sistema.

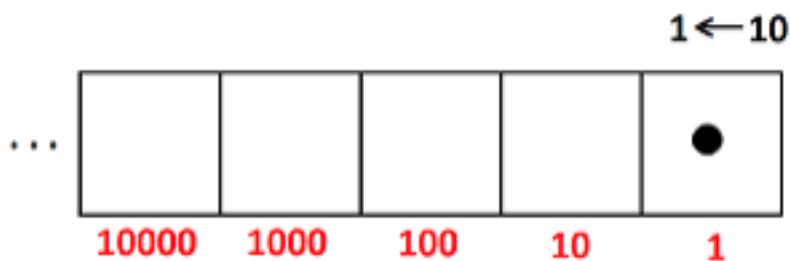
[Si queréis, podéis compartir el enunciado siguiente:](#)

Los científicos debaten la idea de crear ordenadores ópticos, basados en luz polarizada: puede ser luz que viaja en un solo plano, o en un plano perpendicular, o bien puede no haber luz. En estos ordenadores, el sistema notacional más idóneo sería la aritmética en base tres.

## Hablamos como la máquina $1 \leftarrow 10$

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [8:42 minuts]

Y, finalmente, para una máquina  $1 \leftarrow 10$  observamos que diez 1 dan 10, diez 10 dan 100, diez 100 dan 1000, y así sucesivamente. Los valores de los puntos de una máquina  $1 \leftarrow 10$  son unos, dieces, cientos, miles, etc.



Ya vimos que el código del número 273 en una máquina  $1 \leftarrow 10$  es 273, lo cual es absolutamente correcto: 273 es dos 100, siete 10 y tres 1.



De hecho, incluso hablamos el idioma de una máquina  $1 \leftarrow 10$ . Cuando escribimos 273 en letras, escribimos:

## doscientos setenta y tres

Literalmente decimos: dos 100, siete 10 (-ta significa 'diez') y 3.

Así pues, mediante esta historia inventada de puntos y casillas hemos descubierto el valor posicional y las bases de los números: base dos, base tres, base diez, y así sucesivamente. Y la sociedad ha decidido hablar el idioma de la máquina en base diez.



*¿Por qué creéis que los humanos tenemos predilección por la máquina  $1 \leftarrow 10$ ? ¿Por qué nos gusta el número 10 para contar?*

Una respuesta podría ser nuestra fisiología humana: nacemos con diez dedos en las manos. Muchos historiadores opinan que esta podría ser la razón por la que los humanos hemos mostrado preferencia por la base diez.

*Algunas culturas del planeta han utilizado la base veinte. ¿Por qué creéis que han elegido este número?*

De hecho, en la cultura occidental actual se pueden encontrar vestigios de pensamiento en base veinte. Por ejemplo, en francés el número 87 se pronuncia y se escribe *quatre-vingt-sept*, que, traducido palabra por palabra, sería «cuatro veintes siete». En Estados Unidos, el famoso discurso de Gettysburg de Abraham Lincoln empieza así: «Four score and seven years ago» (hace ahora ochenta y siete años). Es decir, literalmente, «Hace cuatro veintes y siete años».

*Resulta que los marcianos tienen cuatro dedos en cada una de las dos manos. ¿Qué base creéis que utilizan en su sociedad? Probablemente, la base ocho.*

Muy bien. Ya hemos logrado el objetivo de esta lección. Hemos descubierto el valor posicional en base diez para escribir números, y hemos visto su contexto en la historia completa del valor posicional. Resulta que a los humanos nos gusta la base diez en concreto porque es el número de dedos que en principio tenemos la mayoría de nosotros.

## **Material A: *Explicamos las máquinas***

Utilizad el material que encontraréis a continuación para los alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar sobre ellas después en casa. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 2.*)

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. [gdaymath.com](http://gdaymath.com)  
Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

7

*Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 2: ¡Eureka!*

## ***Puntos que explotan***

### **Experiencia 2: ¡Eureka!**

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:  
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

### Material A: *Explicamos las máquinas*

En una máquina  $1 \leftarrow 2$ , un par de puntos en cualquier casilla equivalen a un único punto en la casilla de la izquierda. Dado que los puntos de la casilla de más a la derecha valen 1, los de las casillas siguientes valen 2, 4, 8, y 16, y así sucesivamente.

Podemos ver que el código  $1101$  de la máquina  $1 \leftarrow 2$  para el número 13, por ejemplo, es correcto: el 13 es un 8, un 4 y un 1.



**Aquí tenéis algunas preguntas que podéis intentar responder, si**

**queréis.** 1. ¿Qué número tiene el código  $100101$  en la máquina  $1 \leftarrow 2$ ?

2. ¿Cuál es el código de la máquina  $1 \leftarrow 2$  para el número 200?

En una máquina  $1 \leftarrow 3$ , tres puntos en cualquier casilla equivalen a un único punto en la casilla de la izquierda. (Y, de nuevo, cada punto situado en la casilla de más a la derecha vale 1.) En esta máquina obtenemos los valores de los puntos cuando observamos que tres 1 dan 3, tres 3 dan 9, tres 9 dan 27, y así sucesivamente.



- 3.** a) ¿Cuál es el valor de un punto situado en la casilla de la izquierda después de los que vemos en la máquina?
- b) El código  $1 \leftarrow 3$  para el 15 es *120*. Vemos que es correcto, ya que un 9 y dos 3 dan 15, efectivamente.



¿Podemos decir también que el código  $1 \leftarrow 3$  para 15 es *0120*? Es decir, ¿se pueden poner ceros al principio de estos códigos? ¿Y al final de los códigos? ¿Son optativos?

- ¿Podemos eliminar el último cero del código *120* de 15 y escribir simplemente 12? c) ¿Qué número tiene el código 21002 en la máquina  $1 \leftarrow 3$ ?
- d) ¿Cuál es el código de la máquina  $1 \leftarrow 3$  para 200?

- 4.** a) En una máquina  $1 \leftarrow 4$ , cuatro puntos en cualquier casilla equivalen a un único punto en la casilla de la izquierda. ¿Qué valor tiene un punto en cada casilla?



- b) ¿Cuál es el código de la máquina  $1 \leftarrow 4$  para 29?
- c) ¿Qué número tiene el código *132* en la máquina  $1 \leftarrow 4$ ?

- 5.** Resulta que los venusinos tienen seis dedos en cada una de las dos manos. ¿Qué base creéis que utilizan en su sociedad?

1. El 37. Es un 32, un 4 y un 1.
2. Es  $11001000$ .
3. a) Cada punto en la casilla de la izquierda vale tres 81, es decir, 243.  
b) Sí, podemos añadir un cero al principio del código. Esto indicaría que no hay ningún 27, lo cual es absolutamente correcto. Ahora bien, borrar el cero de la derecha ya no es tan sencillo. 120 es el código de 15 (un 9 y dos 3), pero 12 es el código de 5 (un 3 y dos 1).  
c) El 199. (Dos 81, un 27 y dos 1.)  
Es  $21102$ .

4. a) Para una máquina  $1 \leftarrow 4$ , las casillas tienen los valores siguientes:



- b) El número 29 tiene el código  $131$  en una máquina  $1 \leftarrow 4$ ?
- c) El 30. (¡Es uno más que el código para el 29!)
5. ¿Puede ser que los venusinos utilicen la base doce? Esto significa que necesitarán doce símbolos diferentes para escribir números.  
Por cierto, ¿os habéis dado cuenta de que usamos diez símbolos —1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 y 0— y que los llamamos *dígitos*? Este término procede de la misma raíz latina *digitus* que nuestra palabra *dedo*.

## Material B: *Exploraciones brutales*

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es totalmente opcional, pero podría servir como fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 2.*)

## *Puntos que explotan*

### Experiencia 2: ¡Eureka!

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:  
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

#### **Material B: Exploraciones brutales**

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. ¡Divertíos!

#### **EXPLORACIÓN 1: ¿PUEDEN LAS MÁQUINAS «IR AL REVÉS»?**

Juan decide jugar con una máquina que sigue la regla  $1 \leftarrow 1$ . Pone un punto en la casilla de más a la derecha. ¿Qué pasa entonces? Asumimos que hay infinitas casillas hacia la izquierda.



Susana decide jugar con una máquina que sigue la regla  $2 \leftarrow 1$ . Pone un punto en la casilla de más a la derecha. ¿Qué le pasa?

¿Os parecen interesantes estas máquinas? ¿Creéis que vale la pena estudiarlas?

#### **EXPLORACIÓN 2: ¿PODEMOS JUGAR CON MÁQUINAS EXTRAÑAS?**

Marcos decide jugar con una máquina que sigue la regla  $2 \leftarrow 3$ .

- a) Describid qué pasa cuando hay tres puntos en una casilla.
- b) Averiguad los códigos de la máquina  $2 \leftarrow 3$  para los números que van del 1 al 30.  
¿Hay algún patrón?
- c) El código que da esta máquina para el 10 es  $2101$ . Buscad vuestro código para el 20.  
¿Consideráis que puede ser la respuesta al «diez más diez»? ¿Vuestro código para el 30 se parece a la respuesta al «diez más diez más diez»?

**Observación:** Exploraremos esta extraña máquina  $2 \leftarrow 3$  en la experiencia 9. ¡Es muy, muy extraña!