



Uplifting Mathematics for All

Guía didáctica

Puntos que explotan

(Exploding DotsTM)

Experiencia 1:

Las máquinas

Visión general 2 **La máquina** $1 \leftarrow 2$ 3 **Material A:** *La máquina* $1 \leftarrow 2$ 8
Soluciones a las preguntas de «Material A» 9 **Otras máquinas** 10
Material B: *Otras máquinas* 11 Soluciones a las preguntas de «Material B» 12 **La máquina** $1 \leftarrow 10$ 13 **Material C:** *Exploraciones brutales* 15

Recursos relacionados

- Podéis acceder a los vídeos de *Puntos que explotan (Exploding DotsTM)* aquí: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/>
- Es recomendable repasar la guía *Getting Started*.
- Encontraréis material imprimible para el alumno sobre esta experiencia.



© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 1: Las máquinas

Experiencia 1: Las máquinas

Visión general

Objetivos del alumno

La introducción de una máquina $1 \leftarrow 2$, junto a la exploración de otras máquinas,

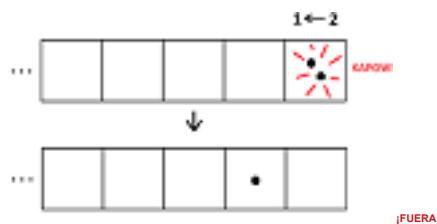
presenta a los alumnos sistemas que convierten números en curiosos códigos. Así, la introducción de una máquina $1 \leftarrow 10$ hace pensar que quizá estos códigos no son tan extraños como parecen a primera vista.

Breve resumen de la experiencia

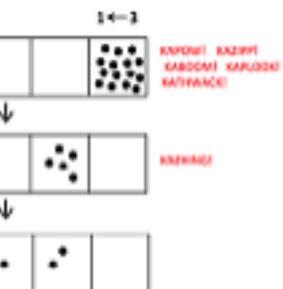
Esta introducción pone las bases de unas matemáticas con sentido. Los alumnos podrán estudiar las máquinas de *Puntos que explotan* y dominar la conversión de números en códigos diversos, como el correspondiente al 22, en una máquina $1 \leftarrow 3$, $1 \leftarrow 5$ o $1 \leftarrow 10$.

Veamos unos ejemplos:

En una máquina $1 \leftarrow 2$, los pares de puntos que hay en cualquier casilla «explotan» —es decir, desaparecen— y pasan a ser un punto en la casilla de la izquierda. (Lo que explica el nombre de la máquina, $1 \leftarrow 2$, escrito así, a la inversa.) Vemos que dos puntos se convierten en un punto y cero puntos, en una máquina $1 \leftarrow 2$. Así pues, decimos que el 2 tiene el código 10 en la máquina $1 \leftarrow 2$.



náquina 1 \leftarrow 3, el número 15 tiene el código 120.



¡FUERA! ¡BOOOM!
¡BUUUM! ¡PUM!
¡CATAPUM!

Y en una máquina $1 \leftarrow 10$, el número 273 tiene el código... ¡273!

Introducción

Podéis ver el vídeo de bienvenida, en el que James introduce esta experiencia: <https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [0:20 minutos].

La máquina 1 ← 2

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección [aquí](#):

Puedes ver un video de James sobre esta lección [aqui](https://globalmathproject.org/exploding-dots/).

Este es el guion que sigue James cuando explica la lección en la pizarra. Por supuesto, podéis adaptarlo como mejor os convenga. En el vídeo podréis ver cuándo y cómo dibuja James los diagramas y cómo los va ampliando. También veréis los divertidos efectos sonoros que hace.

¡Bienvenidos a un viaje!

Es un viaje a las matemáticas basado en una historia hecha por mí, James, que es falsa.

De pequeño inventé una máquina —mentira— que no es más que una serie de casillas ampliable hacia la izquierda tanto como queráis.

A esta máquina mía le puse un nombre, *máquina 1 ← 2*, ambos números escritos y leídos a la inversa («[máquina] dos-uno»), que es más divertido. (Al ser un niño, no era consciente.)



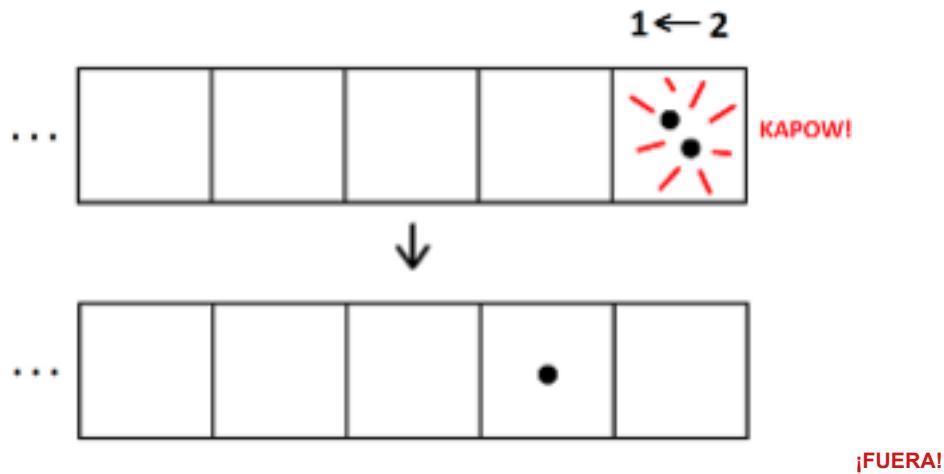
¿Y qué se puede hacer con esta máquina? Poner puntos. Los puntos siempre van en la casilla de más a la derecha.

Pongo un punto y, bueno, no pasa nada: se queda tal cual. Un poquito aburrido...



Pero si pongo un segundo punto —siempre en la casilla de más a la derecha—, la cosa se pone interesante.

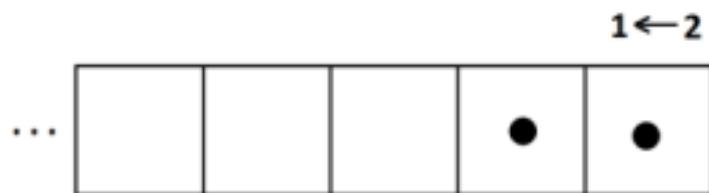
Cuando tenemos dos puntos en una casilla, explotan y desaparecen —¡FUERA!— y son sustituidos por un punto en la casilla de la izquierda.



(¿Veis ahora por qué la llamé *máquina $1 \leftarrow 2$* , escrito de esta forma más divertida?)

Vemos que dos puntos en la máquina generan un punto seguido de cero puntos.

Si ponemos un tercer punto —siempre en la casilla de más a la derecha—, tenemos un punto seguido de un punto.



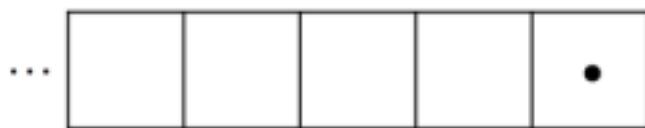
Me di cuenta, en mi historia falsa, de que esta máquina asignaba códigos a los números.

Si pongo un punto en la máquina, sigue siendo un punto. Supongamos que el código de la máquina $1 \leftarrow 2$ para el número 1 es *1*.

Si pongo dos puntos en la máquina, uno tras otro, estos generan un punto en una casi lla seguido de cero puntos. Supongamos que el código de la máquina $1 \leftarrow 2$ para el número 2 es *10*.

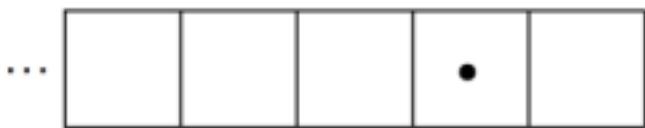
Y si pongo un tercer punto en la máquina, nos da el código *11* para el 3.

$1 \leftarrow 2$



1: 1

$1 \leftarrow 2$



2: 10

$1 \leftarrow 2$



3: 11



¿Cuál es el código de la máquina $1 \leftarrow 2$ para el 4?

$1 \leftarrow 2$



KABOOM!

Un cuarto punto en la máquina resulta especialmente interesante porque... ¡vamos a ver tón de explosiones!

¡BUUUM!



KAZIPP!



¡BOOOM!

El código $1 \leftarrow 2$ para el 4 es 100.

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

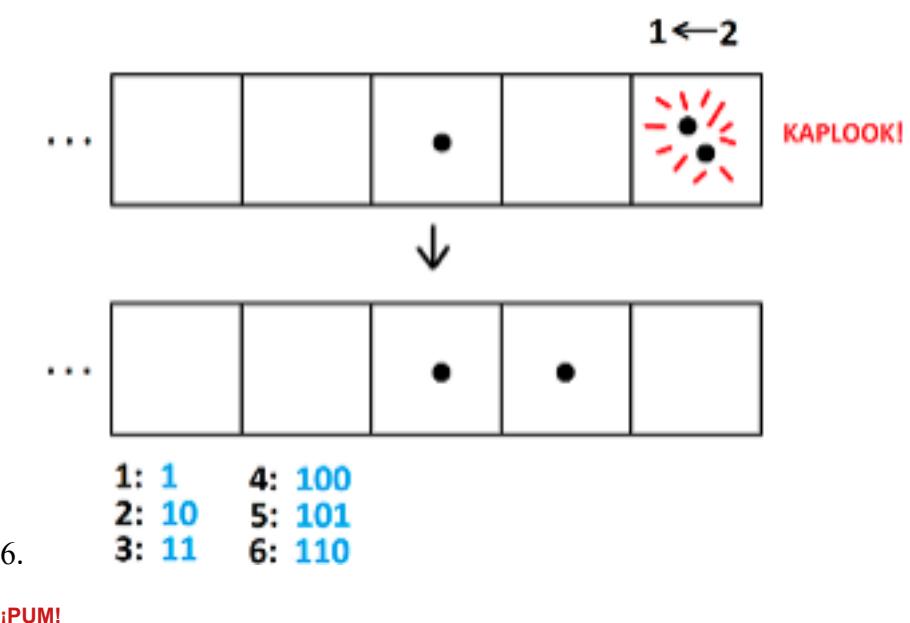
Normalmente, a estas alturas los alumnos más mayores ya están gritando «¡Es binario!» o «¡Es base dos!». Dependiendo del momento, hago como que no los oigo, o acepto lo que dicen, y les agradezco su perspicacia, pero les digo que yo necesité más tiempo que ellos y que, personalmente, tengo que pensarlo con más detenimiento. (Al fin y al cabo, en esta historia soy un niño.)



¿Cuál será el código para el 5?

¿Veis que es el 101?

¿Y el código para el 6? Si añadimos otro punto al código para el 5, nos dará 110 para el



Si tenéis alumnos más jóvenes, quizá os resulte interesante añadir este momento de reflexión que veréis aquí abajo.

De hecho, también podemos obtener el código para el 6 vaciando la máquina y, a continuación, poniendo seis puntos a la vez. Cada par de puntos explotará, uno tras otro, y generará un punto en la casilla de la izquierda.

Aquí tenéis una posible serie de explosiones (¡sin los efectos de sonido!).



¿Os sale el mismo

código final, 110 , si realizáis las explosiones en un orden distinto? (¡Probadlo!)



¿Cuál es el código de la máquina $1 \leftarrow 2$ para el número 13 ?

(Es 1101 . ¿Podéis llegar a esta respuesta?)

Hay alumnos que pueden solucionarlo poniendo un punto cada vez —7 puntos, 8 puntos..., y así hasta 13 puntos—. Otros pueden empezar con una máquina vacía y poner 13 puntos en la casilla de más a la derecha.

Pero esta cuestión no es importante ahora. Si a los alumnos les cuesta responder a esta pregunta, podéis decir: «Sí. Buena respuesta. Quizá sea un poco difícil, sigamos adelante». ¡Y seguís adelante! Ya retomaréis esta cuestión más tarde, y los alumnos estarán orgullosos al ver que entonces sí pueden responder fácilmente a esta pregunta. Procurad que la lección sea ligera y divertida, y que no haya presión.

Horas y horas de diversión jugando con códigos en una máquina $1 \leftarrow 2$.

¡Y un día tuve una sorprendente revelación!

Material A: *La máquina 1 ← 2*

Utilizad el material que encontraréis a continuación para aquellos alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar después en casa. NO son deberes, es algo totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 1.*)

Puntos que explotan

Experiencia 1: Las máquinas

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material A: La máquina 1 ← 2

Esta es la regla para una máquina $1 \leftarrow 2$:

Cuando hay dos puntos en una casilla, explotan y desaparecen —¡FUERA!— y son sustituidos por un punto en la casilla de la izquierda.



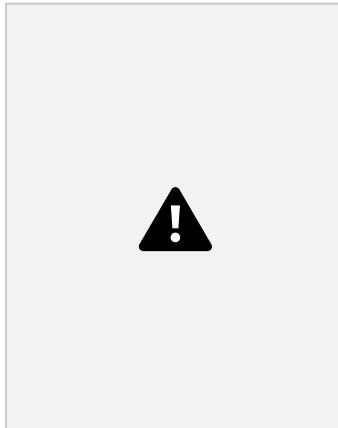
¡FUERA!

Y aquí tenéis algunas preguntas que podéis intentar hacer, si queréis:

1. a) ¿Cuál es el código de la máquina $1 \leftarrow 2$ para el número 13?
 (Es 1101. ¿Podéis llegar a esta respuesta?)
- b) ¿Cuál es el código para el 50 en esta máquina? (¡Vamos!)
2. ¿Podría un número tener el código 100211 en una máquina $1 \leftarrow 2$ si, siempre que podemos, optamos por explosionar los puntos?
3. **RETO:** ¿A qué número corresponde el código 10011 en una máquina $1 \leftarrow 2$?

Soluciones a las preguntas de «Material A»

1. a) Aquí vemos cómo se genera el código *1101* a partir de trece puntos.



1. a) Aquí vemos cómo se genera el código *1101* a partir de trece puntos.
1. b) El número 50 tiene el código *110010*.
2. Si decidimos optar por explosionar los puntos siempre que podamos, entonces el código *100211* no estará completo: los dos puntos de la tercera casilla antes de la última pueden explotar y, entonces, dar *101011* como código final.
3. Este es el código para el número 19. (En la próxima experiencia descubriremos un método ágil para poder verlo.)

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 1: Las máquinas

Otras máquinas

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección [aquí](#):
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:02 minutos].

Me di cuenta de que, aparte de jugar con la máquina $1 \leftarrow 2$, también podía jugar con una máquina $1 \leftarrow 3$ (también escrito y leído hacia atrás: «[máquina] tres-uno»). Así pues, cuando tenemos tres puntos en una casilla, explotan y desaparecen, y son sustituidos por un punto que va a la casilla de la izquierda.

El vídeo sigue un guion muy parecido al de una máquina $1 \leftarrow 2$: averiguar el código para 1 punto, 2 puntos, 3 puntos, 4 puntos, 5 puntos, 6 puntos y..., de repente, 13 puntos.

Alternativamente, podría adoptarse este enfoque.

Con quince puntos en una máquina $1 \leftarrow 3$:

¡FUERA! ¡BOOOM!
¡BUUUM! ¡PUM!
¡CATAPUM!

Primero hay cinco explosiones en la primera casilla, y cada explosión genera un punto en la segunda casilla hacia la izquierda. A continuación, tres de estos puntos explotan y desaparecen, lo que hace que queden dos puntos y aparezca uno nuevo, una posición hacia la izquierda. Así obtenemos el código 120 para el número 15 en una máquina $1 \leftarrow 3$.



¿Cuál es el código de la máquina $1 \leftarrow 3$ para el número 13?

De nuevo, si veis que los alumnos tienen alguna dificultad con esta cuestión, escribid: «Es complicado», y proponed que sigamos adelante. Si hay alumnos familiarizados con los códigos en base tres y responden la pregunta, perfecto. Podéis escribir la respuesta con un interrogante al lado y decir: «Necesito más tiempo. Todavía tengo que pensar un poco».

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

10

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 1: Las máquinas

Horas y horas de diversión averiguando el código de algunos números en una máquina $1 \leftarrow 3$.

Y, entonces, tuve otra revelación. Además de una máquina $1 \leftarrow 3$, vi que podía hacer una máquina $1 \leftarrow 4$, o $1 \leftarrow 5$, o cualquier otra máquina numerada que deseara!

Material B: *Otras máquinas*

Utilizad el material que encontraréis a continuación para aquellos alumnos que quieran practicar con las preguntas de esta lección y reflexionar después en casa sobre ellas. NO son deberes, es totalmente opcional. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 1.*)

Puntos que explotan

Experiencia 1: Las máquinas

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material B: *Otras máquinas*

A continuación encontraréis más preguntas que podéis plantear, si queréis:

1. a) Mostrar que el código para el 4 en una máquina $1 \leftarrow 3$ es

11.

b) Mostrar que el código para el 13 en una máquina $1 \leftarrow 3$ es *111*.

c) Mostrar que el código para el 20 en una máquina $1 \leftarrow 3$ es *202*.

2. ¿Puede tener un número el código *2041* en una máquina $1 \leftarrow 3$? En caso afirmativo, ¿sería «estable» este código?

3. ¿Qué número tiene el código *1022* en una máquina $1 \leftarrow 3$?

¡Y podemos seguir así!

1. ¿Cuál creéis que es la regla para una máquina $1 \leftarrow 4$?

¿Cuál es el código $1 \leftarrow 4$ para el número 13?

2. ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 5$ para el número 13?

3. ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 9$ para el número 13?

4. ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 5$ para el número 12?

5. ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 9$ para el número 20?

6. a) ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 10$ para el número 13?

b) ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 10$ para el número 37?

c) ¿Cuál es el código $1 \leftarrow 10$ para el número 5846?

© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com
Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

11

Guía didáctica. *Puntos que explotan* Experiencia 1: Las máquinas

Soluciones a las preguntas de «Material B»

1. a) ¡Hazlo! b) ¡Haz este también! c) Estás imparable. ¡Haz este tercero también!

2. Igual que antes, si lo que acordamos es hacer todas las explosiones que podamos, este código no estará completo: tres de los puntos de la segunda casilla antes de la última pueden explotar y, entonces, dar *2111* como código.

3. Este código es del número 35.

4. «Cuatro puntos situados en cualquier casilla explotan y son sustituidos por un punto en la

casilla de la izquierda». El número 13 tiene el código 31 en una máquina $1 \leftarrow 4$.

5. Es 23.
6. Es 14.
7. Es 22.
8. Es 22. (El mismo código que en la pregunta anterior, pero, lógicamente, su interpretación es distinta.)
9. a) Es 13. b) Es 37. c) Es 5846. (¡Estos son los códigos que utilizamos para los números en nuestro día a día!)

La máquina $1 \leftarrow 10$

Podéis ver un vídeo de James sobre esta lección aquí:
<https://globalmathproject.org/exploding-dots/> [2:56 minutos].

Vale. Ahora vamos a hacer algo brutal.

¡Vayamos a una máquina $1 \leftarrow 10$ y pongamos 273 puntos!

¿Cuál es el código secreto $1 \leftarrow 10$ para el número 273?



Reflexioné sobre esta cuestión a través de algunas preguntas:

¿Habrá explosiones? ¿Hay grupos de diez que explotarán? ¡Por supuesto! ¿Cuántas explosiones habrá inicialmente? Veintisiete.

¿Quedará algún punto? Sí, tres.

Vale. Por tanto, tenemos veintisiete explosiones, cada una de las cuales genera un punto a la izquierda. Y quedarán tres puntos.



© 2017 James Tanton. Reservados algunos derechos. gdaymath.com

Esta obra tiene una licencia de [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 3.0 Unported License \(CC BY-NC-SA 3.0\)](http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/)

13

Guía didáctica. Puntos que explotan Experiencia 1: Las máquinas

¿Habrá más explosiones? Sí, dos más.

¿Quedará algún punto? Sí, siete.



El código $1 \leftarrow 10$ para el 273 es... 273. ¡Guau!

¡Algo curioso está pasando aquí!

¿Cuál sería la gran pregunta ahora?

Llegados a este punto, los alumnos más mayores gritan «¡Base diez!». Y yo les digo: «Vale. Por supuesto, tenéis razón. Tened paciencia conmigo, y asegurémonos de que se ha entendido perfectamente bien el funcionamiento de estos sistemas de valor posicional». Y paso a la siguiente experiencia.

Utilizad el siguiente material para facilitarlo a aquellos alumnos que quieran reflexionar después en casa con preguntas profundas relacionadas con la experiencia. NO son deberes, es algo totalmente opcional, pero podría servir de fuente para futuros proyectos de los alumnos. (Existe una versión imprimible: *Puntos que explotan. Experiencia 1.*)

Puntos que explotan

Experiencia 1: Las máquinas

Podéis acceder a los vídeos de todas las lecciones de *Puntos que explotan* aquí:

<https://globalmathproject.org/exploding-dots/>

Material C: Exploraciones brutales

Aquí tenéis algunas investigaciones sobre «grandes preguntas»: podéis explorarlas o simplemente reflexionar sobre ellas. Todas se irán aclarando a medida que la historia avance en próximos capítulos, pero igualmente puede ser divertido reflexionar sobre estas ideas.

EXPLORACIÓN 1: ¿QUÉ ESTÁN HACIENDO ESTAS MÁQUINAS?

¿Podéis averiguar qué están haciendo estas máquinas?

¿Por qué el código para el número 273 en una máquina $1 \leftarrow 10$ es 273? ¿Todos los códigos para números de una máquina $1 \leftarrow 10$ son idénticos a como escribimos normalmente los números?

Si habéis podido responder a esta pregunta, ¿podéis entender también todos los códigos de una máquina $1 \leftarrow 2$? ¿Qué significa el código *1101* para el número 13?

Observación: La respuesta a estas preguntas se encuentra en la experiencia 2.

EXPLORACIÓN 2: ¿ES RELEVANTE EL ORDEN EN QUE EXPLOSIONAMOS LOS PUNTOS?

Poned diecinueve puntos en la casilla de más a la derecha de una máquina $1 \leftarrow 2$ y haced explotar algunos pares de puntos al azar: primero, unos pares de la casilla situada más a la derecha; después, otros de la segunda casilla; a continuación, unos cuantos más de la casilla situada más a la derecha; y, de nuevo, algunos pares de la segunda casilla; y así sucesivamente. Hacedlo de nuevo, esta vez cambiando el orden en que realizáis las explosiones. ¡Y aún otra vez más!

¿Aparece el mismo código final *10011* cada vez?